به نام خدا

پاسخ تمرین‌های سری اول: آنالیز برداری

ج ۲-۲) حاصلضرب خارجی دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ بر هر دو بردار عمود است:

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \hat{a}_x + 5\hat{a}_y + 3\hat{a}_z$$

بردار یکه در جهت $\vec{C}$ برابر است با:

$$\frac{\vec{C}}{|\vec{C}|} = \frac{\hat{a}_x + 5\hat{a}_y + 3\hat{a}_z}{\sqrt{35}}$$

ج ۲-۱۶) الف)

$$x = rcos\varphi = 4cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -2$$

$$y = rsin\varphi = 4sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3}$$

$$z = 3$$

ب)

$$R = \sqrt{r^2 + z^2} = 5$$

$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{r}{z}\right) = 53°$$

$$\varphi = 120°$$

ج ۲-۱۷) الف)

$$\left|\vec{E}(-3,4,-5)\right| = \frac{25}{R^2} = \frac{25}{(-3)^2 + 4^2 + (-5)^2} = \frac{1}{2}$$

$$E_x(-3,4,-5) = E_R sin\theta cos\varphi = \frac{25}{(x^2 + y^2 + z^2)} . \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} . \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= \frac{25x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{-75}{50^{3/2}} = -0.21$$

ب)

$$cos\alpha = \frac{\vec{E}.\vec{B}}{|\vec{E}|.|\vec{B}|} = \frac{\frac{1}{2}\hat{a}_R.\left(2\hat{a}_x - 2\hat{a}_y + \hat{a}_z\right)}{\frac{1}{2} \times 3}$$

$$\hat{a}_R.\hat{a}_x = sin\theta cos\varphi = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} . \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{-3}{\sqrt{50}}$$

$$\hat{a}_R.\hat{a}_y = sin\theta sin\varphi = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{4}{\sqrt{50}}$$

$$\hat{a}_R.\hat{a}_z = cos\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{-5}{\sqrt{50}}$$

$$\Rightarrow cos\alpha = \frac{-19}{3\sqrt{50}} = 153.6°$$

ج۲-۲۱) در راستای z تغییراتی نداریم، بنابراین:

$$\overrightarrow{d\ell} = dx\hat{a}_x + dy\hat{a}_y$$

$$\vec{E}.\overrightarrow{d\ell} = \left(y\hat{a}_x + x\hat{a}_y\right).\left(dx\hat{a}_x + dy\hat{a}_y\right) = ydx + xdy$$

الف)

$$\int \vec{E}.\overrightarrow{d\ell} = \int ydx + \int xdy = \int_2^8 \sqrt{\frac{x}{2}}dx + \int_1^2 2y^2dy = \frac{28}{3} + \frac{14}{3} = 14$$

ب) معادله منحنی واصل بین دو نقطه عبارتست از:

$$x = 6y - 4$$

بنابراین داریم:

$$\int \vec{E}.\overrightarrow{d\ell} = \int ydx + \int xdy = \int_2^8 \left(\frac{x+4}{6}\right)dx + \int_1^2 (6y-4)dy = 9 + 5 = 14$$

ج ۲-۲۳) الف) کافی است که گرادیان V را بدست آوریم:

$$\nabla V = \frac{\pi}{2}cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)sin\left(\frac{\pi}{3}y\right)e^{-z}\hat{a}_x + \frac{\pi}{3}sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)cos\left(\frac{\pi}{3}y\right)e^{-z}\hat{a}_y$$
$$- sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)sin\left(\frac{\pi}{3}y\right)e^{-z}\hat{a}_z$$

$$\nabla V(1,2,3) = -\left(\frac{\pi}{6}\hat{a}_y + \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{a}_z\right)e^{-3}$$

ب) بردار واصل بین نقطه P و مبدأ عبارتست از:

$$\overrightarrow{PO} = \hat{a}_x + 2\hat{a}_y + 3\hat{a}_z$$

بردار یکه در راستای بردار فوق نیز برابراست با:

$$\hat{a}_{\mathrm{PO}}=\frac{\hat{a}_x+2\hat{a}_y+3\hat{a}_z}{\sqrt{14}}$$

بنابراین نرخ افزایش V در راستای بردار $\overrightarrow{PO}$ برابر خواهد شد با:

$$\nabla V(1,2,3).\,\hat{a}_{\mathrm{PO}}=-\left(\frac{\pi}{6}\hat{a}_y+\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{a}_z\right)e^{-3}.\frac{\hat{a}_x+2\hat{a}_y+3\hat{a}_z}{\sqrt{14}}=-\frac{e^{-3}}{\sqrt{14}}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)=-0.048$$

ج ۲-۲۴) برای سطح مورد نظر $\overrightarrow{ds}$ عبارتست از:

$$\overrightarrow{ds}=R^2 sin\theta d\theta d\varphi \hat{a}_R$$

بنابراین داریم:

$$\oint_S \hat{a}_R 3sin\theta.\,R^2 sin\theta d\theta d\varphi \hat{a}_R=75\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} sin^2\theta d\theta d\varphi=75\pi^2$$

ج ۲-۲۹) مطابق با قضیه دیورژانس داریم:

$$\int_V \nabla.\vec{A}dv=\oint_S \vec{A}.\overrightarrow{ds}$$

سمت چپ تساوی فوق برابر است با:

$$\nabla.\vec{A}=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^3)+\frac{\partial}{\partial z}(2rz)\right]=3r+2$$

$$\int_V \nabla.\vec{A}dv=\int_0^4\int_0^{2\pi}\int_0^5 (3r+2)rdrd\varphi dz=1200\pi$$

عبارت سمت راست قضیه دیورژانس را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\oint_S \vec{A}.\overrightarrow{ds}=\int_{top\,face}\vec{A}.\overrightarrow{ds}+\int_{buttom\,face}\vec{A}.\overrightarrow{ds}+\int_{wall}\vec{A}.\overrightarrow{ds}$$

برای سطح بالایی $\overrightarrow{ds}$ عبارتست از:

$$\overrightarrow{ds}=rdrd\varphi\hat{a}_z$$

بنابراین

$$\int_{top\,face}\vec{A}.\overrightarrow{ds}=\int_0^{2\pi}\int_0^5 2zrdrd\varphi=200\pi$$

برای سطح پایینی $\overrightarrow{ds}$ عبارتست از:

$$\overrightarrow{ds} = -rdrd\varphi\hat{a}_z$$

بنابراین

$$\int_{top\,face} \overrightarrow{A}.\overrightarrow{ds} = \int_0^{2\pi}\int_0^{5} 2zrdrd\varphi = 0$$

برای سطح دیواره $\overrightarrow{ds}$ عبارتست از:

$$\overrightarrow{ds} = rd\varphi dz\hat{a}_r$$

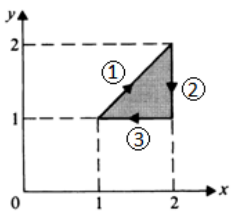
بنابراین

$$\int_{top\,face} \overrightarrow{A}.\overrightarrow{ds} = \int_0^{4}\int_0^{2\pi} r^3 d\varphi dz = 1000\pi$$

در نهایت عبارت سمت راست قضیه دیورژانس برابر خواهد شد با:

$$\oint_S \overrightarrow{A}.\overrightarrow{ds} = 200\pi + 0 + 1000\pi = 1200\pi = \int_V \nabla.\vec{A}dv$$

ج ۲-۳۴)



الف) انتگرال مورد نظر را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\oint \overrightarrow{A}.\overrightarrow{d\ell} = \int_1 \overrightarrow{A}.\overrightarrow{d\ell} + \int_2 \overrightarrow{A}.\overrightarrow{d\ell} + \int_3 \overrightarrow{A}.\overrightarrow{d\ell}$$

در مسیر ۱ داریم:

$$\overrightarrow{d\ell} = dx\hat{a}_x + dy\hat{a}_y$$

$$x = y$$

$$\int_1 \overrightarrow{A}.\overrightarrow{d\ell} = \int_1 (3x^2y^3dx - x^3y^2dy) = \int_1^2 3x^5dx - \int_1^2 y^5dy = 21$$

در مسیر ۲ داریم:

$$\overrightarrow{d\ell} = dy\hat{a}_y$$

$$x = 2$$

$$\int_2 \vec{A}.\overrightarrow{d\ell} = -\int_2 (x^3y^2dy) = -\int_2^1 8y^2dy = \frac{56}{3}$$

در مسیر ۳ نیز داریم:

$$\overrightarrow{d\ell} = dx\hat{a}_x$$

$$y = 1$$

$$\int_3 \vec{A}.\overrightarrow{d\ell} = \int_3 (3x^2y^3dx) = \int_2^1 3x^2dy = -7$$

بنابراین انتگرال مورد نظر برابر است با:

$$\oint \vec{A}.\overrightarrow{d\ell} = 21 + \frac{56}{3} - 7 = 32.67$$

ب)

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & 0 \\ 3x^2y^3 & -x^3y^2 & 0 \end{vmatrix} = -12x^2y^2\hat{a}_z$$

برای سطح مورد نظر $\overrightarrow{ds}$ برابراست با:

بنابراین داریم:

ج) خیر زیرا اگر $\vec{A} = \nabla v$ آنگاه داریم:

$$\nabla \times \vec{A} = \nabla \times (\nabla v) = 0$$

در حالیکه مطابق نتیجه قسمت قبل $\nabla \times \vec{A} \neq 0$.