به نام خدا

حل تمرینات سری دوم الکترومغناطیس

ج۱) چون دو بار غیر همنام هستند میدان در نقطه‌ای خارج از دو بار و نزدیک به بار کوچکتر برابر با صفر می‌شود. بنابراین اگر x_0 فاصله نقطه مورد نظر از بار $+\frac{q}{2}$ باشد داریم:

$$\frac{\frac{q}{2}}{4\pi\varepsilon_0 x_0^2}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(x_0+a)^2}\ \Rightarrow 2x_0^2=(x_0+a)^2\ \Rightarrow x_0^2-2x_0a-a^2=0 \Rightarrow x_0=\left(1+\sqrt{2}\right)a$$

بنابراین فاصله نقطه مورد نظر از مبدأ مختصات عبارتست از:

ج۲)

$$\vec{E}=\int_{L'}\frac{\rho_l dl'(\vec{R}-\vec{R}')}{4\pi\varepsilon_0\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|^3}$$

$$\vec{R}=h\hat{a}_z\ ,\vec{R}'=a\hat{a}_r\ ,dl'=ad\varphi'$$

الف)

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\int_0^{2\pi}\frac{\rho_0 ahd\varphi'}{(h^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{a}_z-\int_0^{2\pi}\frac{\rho_0 a^2d\varphi'}{(h^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{a}_r\right)$$

به راحتی می‌توان دید که میدان در نقطه مورد نظر فقط مؤلفه‌ای در جهت $\hat{a}_z$ دارد. بنابراین

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\frac{\rho_0 ahd\varphi'}{(h^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{a}_z=\frac{\rho_0 ah}{2\varepsilon_0(h^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{a}_z$$

ب)

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\int_0^{2\pi}\frac{\rho_0\cos\varphi ahd\varphi'}{(h^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{a}_z-\int_0^{2\pi}\frac{\rho_0\cos\varphi a^2d\varphi'}{(h^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{a}_r\right)$$

با محاسبه انتگرال اول در رابطه فوق داریم:

$$\int_0^{2\pi}\frac{\rho_0\cos\varphi ahd\varphi'}{(h^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{a}_z=0$$

برای محاسبه انتگرال دوم، از آنجا که جهت $\hat{a}_r$ با تغییرات φ تغییر می‌کند باید آن را به مختصات کارتزین تبدیل نمود:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\rho_0 \cos\varphi a^2 d\varphi'}{(h^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{a}_r = \int_0^{2\pi} \frac{\rho_0 \cos\varphi a^2 d\varphi'}{(h^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\cos\varphi \hat{a}_x + \sin\varphi \hat{a}_y\right)$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\rho_0 \cos^2\varphi a^2 d\varphi'}{(h^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{a}_x + \int_0^{2\pi} \frac{\rho_0 \cos\varphi \sin\varphi a^2 d\varphi'}{(h^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{a}_y = \frac{\rho_0 \pi a^2}{(h^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{a}_x$$

بنابراین میدان الکتریکی در نقطه مورد نظر برابر است با:

$$E = \frac{-\rho_0 a^2}{4\varepsilon_0 (h^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{a}_x$$

ج۳)

$$\vec{E} = \int_{s'} \frac{\rho_s ds' (\vec{R} - \vec{R}')}{4\pi\varepsilon_0 \left|\vec{R} - \vec{R}'\right|^3}$$

$$\vec{R} = h\hat{a}_z, \vec{R}' = r'\hat{a}_r, ds' = r'dr'd\varphi'$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\rho_s r' h}{(h^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}} dr'd\varphi' \hat{a}_z + \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\rho_s {r'}^2}{(h^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}} dr'd\varphi' \hat{a}_r \right)$$

در این مسئله نیز به سادگی می‌توان نشان داد که میدان فقط مؤلفه‌ای در جهت $\hat{a}_z$ دارد. بنابراین

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\rho_s r' h}{(h^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}} dr'd\varphi' \hat{a}_z = \frac{\rho_s h}{2\varepsilon_0} \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{\sqrt{h^2 + a^2}} \right) \hat{a}_z$$

ج۴)

$$\int_s \vec{E}.\overrightarrow{ds} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} R^2 sin\theta d\theta d\varphi = \frac{q}{4\varepsilon_0}$$

ج۵) از قانون گوس استفاده می‌کنیم. برای $R > a$ داریم:

$$\vec{E} = E_R \hat{a}_R$$

$$\oint_s \vec{E}.\overrightarrow{ds} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} E_R R^2 sin\theta d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^a \frac{\rho_0}{\varepsilon_0 R} R^2 sin\theta dR d\theta d\varphi$$

$$\Rightarrow E_R 4\pi R^2 = \frac{2\pi\rho_0 a^2}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\rho_0 a^2}{2\varepsilon_0 R^2} \hat{a}_R$$

برای $R < a$ داریم:

$$\oint_s \vec{E}.\overrightarrow{ds} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} E_R R^2 sin\theta d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^R \frac{\rho_0}{\varepsilon_0 R} R^2 sin\theta dR d\theta d\varphi$$

$$\Rightarrow E_R 4\pi R^2 = 2\pi\rho_0 a^2 \Rightarrow \vec{E} = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \hat{a}_R$$

ج۶) با استفاده از قانون گوس برای نواحی $R > 4R_1$ میدان الکتریکی و در نتیجه پتانسیل برابر با صفر است. زیرا مجموع بار درون سطح گوسی به شکل کره‌ای با شعاع $R > 4R_1$ صفر می‌باشد. بنابراین

$$R > 4R_1: \quad \overrightarrow{E_1} = 0\,, V_1 = 0$$

برای نواحی $2R_1 < R < 4R_1$ یک سطح گوسی به شکل کره‌ای با شعاع $2R_1 < R < 4R_1$ در نظر می‌گیریم. مجموع بار درون این کره برابر است با:

$$Q_T = Q - Q\frac{\frac{4}{3}\pi(R^3 - (2R_1)^3)}{\frac{4}{3}\pi((4R_1)^3 - (2R_1)^3)} = Q\frac{64R_1^3 - R^3}{56R_1^3}$$

بنابراین شدت میدان الکتریکی و پتانسیل الکتریکی در این ناحیه برابرند با:

$$E_R 4\pi R^2 = \frac{Q_T}{\varepsilon_0} = Q\frac{64R_1^3 - R^3}{56R_1^3\varepsilon_0} \Rightarrow \overrightarrow{E_2} = \frac{Q}{224\pi\varepsilon_0 R^2}\left(64 - \left(\frac{R}{R_1}\right)^3\right)\hat{a}_R$$

$$V_2 = -\int_{\infty}^{4R_1}\overrightarrow{E_1}.\overrightarrow{dl} - \int_{4R_1}^{R}\overrightarrow{E_2}.\overrightarrow{dl} = \frac{Q}{224\pi\varepsilon_0}\left(\frac{64}{R} + \frac{R^2}{2R_1^3} - \frac{24}{R_1}\right)$$

برای نواحی $R_1 < R < 2R_1$ با استفاده از قانون گوس داریم:

$$E_R 4\pi R^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \overrightarrow{E_3} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

$$V_3 = -\int_{\infty}^{4R_1}\overrightarrow{E_1}.\overrightarrow{dl} - \int_{4R_1}^{2R_1}\overrightarrow{E_2}.\overrightarrow{dl} - \int_{2R_1}^{R}\overrightarrow{E_3}.\overrightarrow{dl} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{9}{28R_1}\right)$$

برای نواحی $\mathrm{R} < R_1$ یک سطح گوسی به شکل کره‌ای با شعاع $\mathrm{R} < R_1$ در نظر می‌گیریم. مجموع بار درون این کره برابر است با:

$$Q_T = Q\frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{4}{3}\pi R_1^3} = Q\left(\frac{R}{R_1}\right)^3$$

بنابراین شدت میدان الکتریکی و پتانسیل الکتریکی در این ناحیه برابرند با:

$$E_R 4\pi R^2 = \frac{Q_T}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0}\left(\frac{R}{R_1}\right)^3 \Rightarrow \overrightarrow{E_4} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\left(\frac{R}{R_1}\right)^3\hat{a}_R$$

$$V_4 = -\int_{\infty}^{4R_1}\overrightarrow{E_1}.\overrightarrow{dl} - \int_{4R_1}^{2R_1}\overrightarrow{E_2}.\overrightarrow{dl} - \int_{2R_1}^{R_1}\overrightarrow{E_3}.\overrightarrow{dl} - \int_{R_1}^{R}\overrightarrow{E_3}.\overrightarrow{dl} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{33}{28R_1} - \frac{R^2}{2R_1^3}\right)$$

ج۷) ابتدا با استفاده از قانون گوس میدان را درون پوسته به دست می‌آوریم:

$$D_R 4\pi R^2 = q \Rightarrow \vec{D} = \frac{q}{4\pi R^2}\hat{a}_R$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon R^2}\hat{a}_R = \frac{q}{12\pi\varepsilon_0 R}\hat{a}_R$$

حال به صورت زیر اختلاف پتانسیل بین دو سطح پوسته را محاسبه می‌کنیم:

$$V_{ab} = -\int_b^a \vec{E}.\vec{dl} = -\int_b^a \frac{q}{12\pi\varepsilon_0 R}dR = -\frac{q}{12\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

۸) از آنجا که در این سؤال ضریب گذردهی پوسته داده نشده است، بنابراین پوسته عایق را با چگالی‌های بار مقید معادل جایگزین کرده و شدت میدان الکتریکی را با استفاده از قانون گوس بدست می‌آوریم.

چگالی بار سطحی مقید روی پوسته خارجی:

$$\rho_{psb} = \vec{P}.\hat{a}_n = \frac{3}{b^2}\hat{a}_r.\hat{a}_r = \frac{3}{b^2}$$

چگالی بار سطحی مقید روی پوسته داخلی:

$$\rho_{psa} = \vec{P}.\hat{a}_n = \frac{3}{a^2}\hat{a}_r.(-\hat{a}_r) = -\frac{3}{a^2}$$

چگالی بار حجمی مقید:

$$\rho_p = -\nabla.\vec{P} = -\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{3}{r}\right)\right) = \frac{3}{r^3}$$

برای نواحی $r > b$ یک سطح گوسی به صورت استوانه‌ای با شعاع $r > b$ و ارتفاع h در نظر می‌گیریم. از آنجا که مجموع بار درون این سطح گوسی صفر است (حتماً بررسی کنید)، در نتیجه

$$r > b: \quad \overrightarrow{E_1} = 0$$

برای نواحی $a < r < b$ نیز یک سطح گوسی به صورت استوانه‌ای با شعاع $a < r < b$ و ارتفاع h در نظر می‌گیریم. مجموع بار درون این سطح برابر است با:

$$Q_T = \int_s \rho_{psa}ds + \int_v \rho_p dv = \int_0^h\int_0^{2\pi} -\frac{3}{a^2}ad\varphi dz + \int_0^h\int_0^{2\pi}\int_a^r \frac{3}{r^3}rdrd\varphi dz = -\frac{6\pi h}{r}$$

بنابراین شدت میدان الکتریکی در این ناحیه برابر است با:

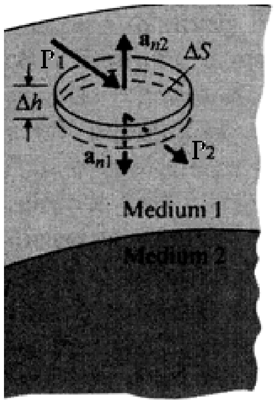
$$E_r 2\pi rh = \frac{Q_T}{\varepsilon_0} \Rightarrow \overrightarrow{E_2} = -\frac{3}{r^2\varepsilon_0}\hat{a}_r$$

برای نواحی $r < b$نیز چون باری وجود ندارد، در نتیجه

$$r < a: \quad \overrightarrow{E_3} = 0$$

(این مسئله را با استفاده از چگالی شار الکتریکی، $\vec{D}$، می‌توان بسیار ساده‌تر حل کرد، حتماً بررسی کنید)

۹) مطابق شکل زیر در مرز دو عایق استوان کوچکی به ارتفاع $\Delta h \to 0$ و مساحت قاعده ΔS در نظر می‌گیریم.



با توجه به رابطه $\rho_p = -\nabla.\vec{P}$ و استفاده از قضیه دیورژانس داریم:

$$\oint \vec{P}.\overrightarrow{ds} = -q_p$$

حال انتگرال فوق را روی سطح استوانه محاسبه می‌کنیم:

$$\oint \vec{P}.\overrightarrow{ds} = \left(\overrightarrow{P_1}.\hat{a}_{n2} + \overrightarrow{P_2}.\hat{a}_{n1}\right)\Delta S = \hat{a}_{n2}.\left(\overrightarrow{P_1} - \overrightarrow{P_2}\right)\Delta S = -\rho_{sp}\Delta S$$

$$\Rightarrow \ \hat{a}_{n2}.\left(\overrightarrow{P_2} - \overrightarrow{P_1}\right) = \rho_{sp}$$

توجه شود که انتگرال روی دیواره استوانه، به علت اینکه $\Delta h \to 0$، به سمت صفر میل می‌کند.