بسمه تعالی

حل تمرینات سری سوم

ج۱) بارهای Q+ و Q– را به ترتیب روی صفحات بالایی و پایینی خازن قرار می‌دهیم. شدت میدان الکتریکی و پتانسیل الکتریکی بین صفحات خازن برابرند با:

$$\vec{E} = -\frac{\rho_s}{\varepsilon}\hat{a}_z$$

$$V = -\int_0^d \vec{E}.dl = -\int_0^d -\frac{\rho_s}{\varepsilon}\hat{a}_z.dz\,\hat{a}_z = \frac{\rho_s}{\varepsilon_0}\int_0^d \frac{1}{\left(1+\frac{z}{d}\right)}dz = \frac{d\rho_s \ln(2)}{\varepsilon_0} = \frac{dQ\ln(2)}{\varepsilon_0 S}$$

به این ترتیب ظرفیت این خازن برابر خواهد شد با:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon_0 S}{d\ln(2)}$$

ج۲) بارهای بارهای Q+ و Q– را به ترتیب روی هادی‌های داخلی و خارجی خازن قرار می‌دهیم. شدت میدان الکتریکی با استفاده از قانون گوس برابر است با:

$$\vec{E} = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon r}\hat{a}_r$$

پتانسیل الکتریکی بین هادی‌های خازن نیز برابر است با:

$$V = -\int_b^a \vec{E}.dl = -\int_b^a \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon r}\hat{a}_r.dr\hat{a}_r = -\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\int_b^a dr = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}(b-a)$$

به این ترتیب ظرفیت بر واحد طول این خازن برابر خواهد شد با:

$$C = \frac{\rho_l}{V} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{(b-a)}$$

ج۳) بارهای Q+ و Q– را به ترتیب روی هادی‌های داخلی و خارجی خازن قرار می‌دهیم. شدت میدان الکتریکی در محیط با ضریب دی‌الکتریک ε_rو فضای آزاد با استفاده از قانون گوس برابر است با:

$$\overrightarrow{E_1} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R^2}\hat{a}_R \qquad R_i < R < R_i + x$$

$$\overrightarrow{E_2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{a}_R \qquad R_i + x < R < R_o$$

اختلاف پتانسیل الکتریکی بین هادی‌های خازن نیز برابر است با:

$$V = -\int_{R_o}^{R_i} \vec{E}.dl = -\int_{R_o}^{R_i+x} \overrightarrow{E_2}.dl - \int_{R_i+x}^{R_i} \overrightarrow{E_1}.dl = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1-\frac{1}{\varepsilon_r}}{R_i+x} + \frac{1}{\varepsilon_r R_i} - \frac{1}{R_o}\right)$$

ظرفیت این خازن برابر خواهد شد با:

$$C_d = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\left(\frac{1-\frac{1}{\varepsilon_r}}{R_i+x} + \frac{1}{\varepsilon_r R_i} - \frac{1}{R_o}\right)}$$

ظرفیت خازن فوق را می‌توان از سری کردن دو خازن کروی نیز بدست آورد (بررسی کنید).

ظرفیت این خازن بدون عایق با ضریب دی‌الکتریک ε_r برابر است با:

$$C_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_o}\right)}$$

به این ترتیب داریم:

$$C_d = kC_0 \;\Rightarrow\; x = \frac{k(\varepsilon_r - 1)R_i R_o}{\varepsilon_r(k-1)R_i + (\varepsilon_r - k)R_o} - R_i$$

ج۴) بارهای Q+ و Q– را به ترتیب روی هادی‌های داخلی و خارجی خازن قرار می‌دهیم. با انتخاب یک سطح کروی در فضای بین دو هادی به عنوان سطح گوسی و با استفاده از قانون گوس داریم:

$$\oint \vec{D}.\overrightarrow{ds} = \int_{S1} \vec{D}_1.\overrightarrow{ds} + \int_{S2} \vec{D}_2.\overrightarrow{ds} + \int_{S3} \vec{D}_3.\overrightarrow{ds} + \int_{S3} \vec{D}_4.\overrightarrow{ds} = Q$$

که $S1$، $S2$، $S3$ و $S4$ بخش‌هایی از سطح گوسی هستند که در نواحی با عایق‌های مختلف قرار گرفته‌اند.

$$\oint \vec{D}.\overrightarrow{ds} = \int_{S1} \varepsilon_1\vec{E}_1.\overrightarrow{ds} + \int_{S2} \varepsilon_2\vec{E}_2.\overrightarrow{ds} + \int_{S3} \varepsilon_3\vec{E}_3.\overrightarrow{ds} + \int_{S3} \varepsilon_4\vec{E}_4.\overrightarrow{ds} = Q$$

اما با توجه به اینکه شدت میدان الکتریکی به صورت شعاعی است و با استفاده از شرط مرزی مؤلفه مماسی میدان‌ها داریم:

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_2 = \vec{E}_3 = \vec{E}_4 = \vec{E} = E_R\hat{a}_R$$

$$\oint \vec{D}.\overrightarrow{ds} = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)E_R(\pi R^2) = Q \Rightarrow E_R = \frac{Q}{\pi\varepsilon_0(1+2+3+4)R^2} = \frac{Q}{10\pi\varepsilon_0 R^2}$$

اختلاف پتانسیل الکتریکی بین هادی‌های خازن نیز برابر است با:

$$V = -\int_{2a}^{a} \vec{E}.dl = \frac{Q}{20\pi\varepsilon_0 a}$$

به این ترتیب ظرفیت خازن برابر است با:

$$C = \frac{Q}{V} = 20\pi\varepsilon_0 a$$

ظرفیت خازن فوق را می‌توان از موازی کردن چهار خازن ربع کروی نیز بدست آورد (بررسی کنید).

ج ۵) بارهای Q+ و Q– را روی هادی‌های خازن قرار می‌دهیم.

پتانسیل روی سطح هادی با بار مثبت برابر است با:

$$V_+ = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 d}$$

به همین ترتیب پتانسیل روی سطح هادی با بار منفی برابر است با:

$$V_- = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 d}$$

بنابراین اختلاف پتانسیل بین دو هادی برابر است با:

$$V = V_+ - V_- = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 a} - \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 d} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{d}\right)$$

در نهایت ظرفیت این خازن برابر است با:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{d}\right)}$$

ج۶)

$$W_e = \frac{1}{2}\int_{V'} \rho V dv$$

با استفاده از قانون گوس میدان الکتریکی در ناحیه $R > b$ برابر است با:

$$E_{R1}(4\pi R^2) = \rho\frac{4}{3}\pi(b^3 - a^3) \Rightarrow E_{R1} = \rho\frac{(b^3 - a^3)}{3\varepsilon_0 R^2}$$

و در ناحیه $a < R < b$ برابر است با:

$$E_{R2}(4\pi R^2) = \rho\frac{4}{3}\pi(R^3 - a^3) \Rightarrow E_{R2} = \rho\frac{(R^3 - a^3)}{3\varepsilon_0 R^2}$$

بنابراین پتانسیل الکتریکی در ناحیه $a < R < b$ عبارتست از:

$$V = -\int_{\infty}^{R} \vec{E}.dl = -\int_{\infty}^{b} \vec{E}_1.dl - \int_{b}^{R} \vec{E}_2.dl = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{3b^2}{2} - \frac{R^2}{2} - \frac{a^3}{R}\right)$$

به این ترتیب انرژی لازم برابر است با:

$$W_e = \frac{1}{2}\rho \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_a^b \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{3b^2}{2} - \frac{R^2}{2} - \frac{a^3}{R}\right) R^2 sin\theta dR d\theta d\varphi = \frac{2\pi\rho^2}{15\varepsilon_0}(3a^5 + 2b^5 - 5a^3b^2)$$

ج۷) این خازن در واقع از موازی شدن دو خازن تشکیل شده است بنابراین داریم:

$$W_1 = W_2 \Rightarrow \frac{1}{2}C_1V^2 = \frac{1}{2}C_2V^2$$

زیرا اختلاف پتانسیل دو سر خازن‌های موازی با هم برابر است. به این ترتیب برای برابر بودن انرژی الکتریکی ذخیره شده در دو ناحیه باید ظرفیت خازن‌های متناظر با این دو ناحیه با هم برابر باشد:

$$C_1 = C_2 \Rightarrow \frac{\varepsilon_0 W(\ell - x)}{d} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r W x}{d} \Rightarrow (\ell - x) = \varepsilon_r x \Rightarrow x = \frac{\ell}{1+\varepsilon_r}$$

ج۸) ابتدا ظرفیت بین این دو سیم را بدست می‌آوریم. برای این منظور فرض می‌کنیم توزیع بارهای ρ_l و $-\rho_l$ را روی دو سیم قرار داده‌ایم. پتانسیل الکتریکی روی سیم با بار مثبت با فرض مرجع در r_0 برابر است با:

$$V_+ = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0} ln\frac{r_0}{b} - \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0} ln\frac{r_0}{D} = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0} ln\frac{D}{b}$$

به همین ترتیب پتانسیل الکتریکی روی سیم با بار منفی با فرض مرجع در r_0 برابر است با:

$$V_- = -\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0} ln\frac{r_0}{b} + \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0} ln\frac{r_0}{D} = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0} ln\frac{b}{D}$$

بنابراین اختلاف پتانسیل بین دو سیم برابر است با:

$$V_0 = V_+ - V_- = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0} ln\frac{D}{b} - \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0} ln\frac{b}{D} = \frac{\rho_l}{\pi\varepsilon_0} ln\frac{D}{b}$$

ظرفیت واحد طول برای این خط دو سیمه برابر است با:

$$C = \frac{\rho_l}{V_0} = \frac{\pi\varepsilon_0}{ln\frac{D}{b}}$$

در نهایت نیروی وارد بر واحد این خط عبارتست از:

$$F = \frac{V_0^2}{2}\frac{\partial C}{\partial D} = -\frac{\pi\varepsilon_0 V_0^2}{2D\left(ln\frac{D}{b}\right)^2}$$