بسمه تعالی

حل تمرینات سری چهارم

ج۱) می‌دانیم که مقدار و محل تصویر بار نقطه‌ای Q به فاصله d از مرکز یک کره هادی زمین شده به صورت زیر است:

$$Q_i = -\frac{a}{d}Q$$
$$d_i = \frac{a^2}{d}$$

با توجه به اینکه یک حلقه باردار با چگالی ρ_l و شعاع d ترکیبی از بی‌نهایت بار دیفرانسیلی $dq = \rho_l d d\varphi$ است، مقدار و محل تصویر هرکدام از این بارهای دیفرانسیلی به صورت زیر است:

$$dq_i = -\frac{a}{d}dq = -a\rho_l d\varphi$$
$$d_i = \frac{a^2}{d}$$

بنابراین تصویر این حلقه باردار، خود یک حلقه به شعاع $d_i = \frac{a^2}{d}$ و چگالی بار زیر است:

$$q_i = \int dq_i = \int_0^{2\pi} -a\rho_l d\varphi = -2\pi a\rho_l$$
$$\rho_{li} = \frac{q_i}{2\pi d_i} = -\frac{d}{a}\rho_l$$

ج۲) مشابه مسئله قبل، تصویر کره‌ای با کل بار Q و به شعاع R_2 نسبت به کره هادی زمین شده با شعاع R_1، کره‌ایست به شعاع $R_i = \frac{{R_1}^2}{R_2}$ و با بار کلی $Q_i = -\frac{R_1}{R_2}Q$. بنابراین برای محاسبه شدت میدان الکتریکی، کره هادی را برداشته و به جای آن کره باردار تصویر را قرار می‌دهیم. با استفاده از قانون گوس داریم:

$$\vec{E} = E_R\hat{a}_R = \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{a}_R = \frac{-\frac{R_1}{R_2}Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{a}_R$$

ج۳) برای حل این مسئله، صفحه هادی زمین شده را برداشته و به جای آن حلقه باردار تصویر را با چگالی $-\rho_l$ و به فاصله h در زیر صفحه هادی قرار می‌دهیم. در تمرین دوم از سری دوم تمرینات، شدت میدان الکتریکی ناشی از حلقه باردار به شعاع a را در محور حلقه به فاصله h به صورت زیر بدست آوردیم:

$$\vec{E} = \frac{\rho_l a h}{2\varepsilon_0 (h^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{a}_z$$

بنابراین در این مسئله شدت میدان الکتریکی در نقطه O برابر است با:

$$\vec{E} = -\frac{\rho_l a h}{2\varepsilon_0 (h^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{a}_z - \frac{\rho_l a h}{2\varepsilon_0 (h^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{a}_z = -\frac{\rho_l a h}{\varepsilon_0 (h^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{a}_z$$

به این ترتیب چگالی بار سطحی در نقطه O برابر است با:

$$\rho_s = \varepsilon_0 E_n = \varepsilon_0 E_z = -\frac{\rho_l a h}{(h^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ج۴) مقدار و محل تصویر این بار نقطه‌ای نسبت به کره هادی عبارتست از:

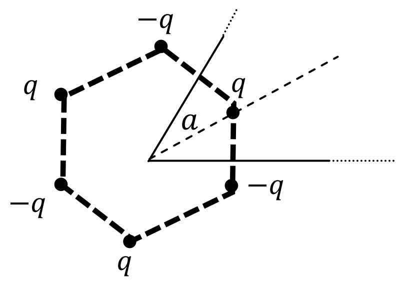
$$q_i = -\frac{a}{2a} q = -\frac{q}{2}$$

$$d_i = \frac{a^2}{2a} = \frac{a}{2}$$

حال کافی است که نیروی وارد بر بار تصویر ناشی از بار اصلی را با استفاده از قانون کولمب بدست آوریم:

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{q \times \left(-\frac{q}{2}\right)}{4\pi\varepsilon_0 (2a - a/2)^2} = \frac{-q^2}{18\pi\varepsilon_0 a^2}$$

ج۵) تعداد بارهای تصویر از رابطه $n = \frac{360}{\alpha} - 1$ که α زاویه بین صفحات هادی به درجه است، بدست می‌آید. بنابراین تعداد بارهای تصویر $n = 5$ می‌باشد.



با توجه به شکل فوق، پتانسیل الکتریکی ناشی از بارهای تصویر در محل بار اصلی برابر است با:

بنابراین انرژی مورد نیاز برابر است با:

$$W = qV = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(-2.5 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

ج۶) باید معادله لاپلاس را در دستگاه مختصات استوانه‌ای حل کنیم. اگر پتانسیل فقط تابعی از φ باشد، معادله لاپلاس به صورت زیر خواهد شد:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{d^2 V}{d\varphi^2} = 0$$

در نتیجه پاسخ معادله فوق در دو ناحیه عبارتست از:

$$V_1 = A\varphi + B$$
$$V_2 = C\varphi + D$$

شدت میدان الکتریکی نیز در دو ناحیه برابر خواهد شد با:

$$\vec{E}_1 = -\nabla V_1 = -\frac{A}{r}\hat{a}_\varphi$$
$$\vec{E}_2 = -\nabla V_2 = -\frac{C}{r}\hat{a}_\varphi$$

با توجه به شرایط مرزی داریم:

$$V_1(\varphi = 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0$$
$$V_2(\varphi = \pi/2) = V_0 \quad \Rightarrow \quad D = V_0 - \frac{\pi}{2}C$$
$$V_1(\varphi = \pi/3) = V_2(\varphi = \pi/3) \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{C}{2} + \frac{3V_0}{\pi}$$
$$\varepsilon_1 E_{1n}\left(\varphi = \frac{\pi}{3}\right) = \varepsilon_2 E_{2n}\left(\varphi = \frac{\pi}{3}\right) \quad \Rightarrow \varepsilon_1 E_{1\varphi}\left(\varphi = \frac{\pi}{3}\right) = \varepsilon_2 E_{2\varphi}\left(\varphi = \frac{\pi}{3}\right)$$
$$\Rightarrow \quad A = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}C$$

به این ترتیب داریم:

$$C = \frac{6V_0\varepsilon_1}{\pi(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2)}$$
$$A = \frac{6V_0\varepsilon_2}{\pi(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2)}$$
$$\vec{E}_1 = -\frac{6V_0\varepsilon_2}{\pi r(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2)}\hat{a}_\varphi$$
$$\vec{E}_2 = -\frac{6V_0\varepsilon_1}{\pi r(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2)}\hat{a}_\varphi$$

ج۷) باید معادله لاپلاس را در دستگاه مختصات کروی حل کنیم. واضح است، که پتانسیل فقط به R وابسته است. بنابراین داریم:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{R^2}\frac{d}{dR}\left(R^2\frac{dV}{dR}\right) = 0$$

در نتیجه پاسخ معادله فوق عبارتست از:

$$V = \frac{A}{R} + B$$

شدت میدان الکتریکی نیز برابر خواهد شد با:

$$\vec{E} = -\nabla V = \frac{A}{R^2}\hat{a}_R$$

حال با توجه به شرایط مرزی داریم:

$$V(0.02) = -25$$
$$V(0.35) = 150$$
$$\Rightarrow \begin{cases} A = -3.7 \\ B = 160.6 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{-3.7}{R^2}\hat{a}_R \Rightarrow \rho_s = \varepsilon_0\varepsilon_r E_n = \varepsilon_0\varepsilon_r E_R(0.02) = \frac{-3.7 \times 5}{36\pi \times 10^9 (0.02)^2} = 409 \ \ \frac{\mathrm{nc}}{\mathrm{m}^2}$$

ج۸) باید معادله لاپلاس را در دستگاه مختصات استوانه‌ای حل کنیم. واضح است، که پتانسیل فقط به r وابسته است. بنابراین داریم:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dV}{dr}\right) = 0$$

در نتیجه پاسخ معادله فوق عبارتست از:

$$V = A\ln r + B$$

با توجه به شرایط مرزی داریم:

$$V(a) = V_a \Rightarrow A\ln a + B = V_a$$
$$V(b) = V_a \Rightarrow A\ln b + B = V_b$$
$$\Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{V_b - V_a}{\ln(b/a)} \\ B = \dfrac{V_a\ln b - V_b\ln a}{\ln(b/a)} \end{cases}$$
$$\Rightarrow V = \frac{V_b - V_a}{\ln(b/a)}\ln r + \frac{V_a\ln b - V_b\ln a}{\ln(b/a)}$$

ج۹) باید معادله لاپلاس را در دستگاه مختصات کروی حل کنیم. با توجه به اینکه در این مسئله اطلاعاتی در رابطه با طول مخروط‌ها داده نشده است، بنابراین واضح است که پتانسیل فقط به پارمتر θ وابسته می-باشد. در اینصورت معادله لاپلاس عبارتست از:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{R^2 \sin\theta} \frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{dV}{d\theta}\right) = 0$$

برای حل معادله فوق داریم:

$$\sin\theta \frac{dV}{d\theta} = C_1 \;\Rightarrow\; V = C_1 \int \frac{1}{\sin\theta} d\theta = C_1 \ln\left(\tan\frac{\theta}{2}\right) + C_2$$

حال با توجه به شرایط مرزی داریم:

$$V(\theta_1) = V_0$$
$$V(\theta_2) = 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{V_0}{\ln\left[\dfrac{\tan\frac{\theta_1}{2}}{\tan\frac{\theta_2}{2}}\right]} \\ C_2 = -\dfrac{V_0 \ln\left(\tan\frac{\theta_2}{2}\right)}{\ln\left[\dfrac{\tan\frac{\theta_1}{2}}{\tan\frac{\theta_2}{2}}\right]} \end{cases}$$

$$\Rightarrow V = \frac{V_0 \ln\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)}{\ln\left[\dfrac{\tan\frac{\theta_1}{2}}{\tan\frac{\theta_2}{2}}\right]} - \frac{V_0 \ln\left(\tan\frac{\theta_2}{2}\right)}{\ln\left[\dfrac{\tan\frac{\theta_1}{2}}{\tan\frac{\theta_2}{2}}\right]} = V_0 \frac{\ln\left[\dfrac{\tan\frac{\theta}{2}}{\tan\frac{\theta_2}{2}}\right]}{\ln\left[\dfrac{\tan\frac{\theta_1}{2}}{\tan\frac{\theta_2}{2}}\right]}$$