بسمه تعالی

حل تمرینات سری پنجم

ج۱) جریان در جهت $\hat{a}_r$ بوده و در نتیجه سطح عمود بر آن استوانه‌ای به شعاع r و طول l است. بنابراین المان سطح عبارتست از:

$$\overrightarrow{ds} = rd\varphi dz\hat{a}_r$$

و کل جریان برابر خواهد بود با:

$$I = \int \vec{J}.\overrightarrow{ds} = \int_0^L \int_0^{2\pi} \frac{cos\varphi}{r}\hat{a}_r\,.rd\varphi dz\hat{a}_r = 0$$

ج۲)

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t} = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(\frac{\varepsilon_0}{\sigma}\ln 2\right)} = \frac{\rho_0}{2}$$

$$Q = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a}\frac{\rho_0}{2}R^2 sin\theta dRd\theta d\varphi = \frac{2}{3}\rho_0\pi a^3$$

ج۳) با توجه به شرایط مرزی مؤلفه عمودی چگالی شار الکتریکی داریم:

$$\rho_s = \hat{a}_n.\left(\overrightarrow{D_1} - \overrightarrow{D_2}\right) = \hat{a}_z.\left(\overrightarrow{D_1} - \overrightarrow{D_2}\right)$$
$$= \hat{a}_z.\left(\varepsilon_1\overrightarrow{E_1} - \varepsilon_2\overrightarrow{E_2}\right)$$
$$= \hat{a}_z.\left(\frac{\varepsilon_1}{\sigma_1}\overrightarrow{J_1} - \frac{\varepsilon_2}{\sigma_2}\overrightarrow{J_2}\right) = 6\frac{\varepsilon_1}{\sigma_1}J_0 - \frac{\varepsilon_2}{\sigma_2}J_{2z}$$

از طرفی مطابق با شرط مرزی مؤلفه عمودی چگالی جریان، $J_{n1} = J_{n2}$ $(J_{z1} = J_{z2})$ و در نتیجه:

$$\rho_s = 6J_0\left(\frac{\varepsilon_1}{\sigma_1} - \frac{\varepsilon_2}{\sigma_2}\right)$$

ج۴) فرض می‌کنیم که اختلاف پتانسیل بین دو قطاع برابر با V_0 باشد. باید معادله لاپلاس را با توجه به شرایط مرزی زیر حل کنیم:

$$V(a) = 0\,, V(b) = V_0$$

با توجه به اینکه پتانسیل تنها تابعی از r است، داریم:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dV}{dr}\right) = 0$$
$$\Rightarrow V = A\ln r + B$$

بنابراین پتانسیل با اعمال شرایط مرزی برابر است با:

$$V=\frac{V_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\ln r-\frac{V_0\ln a}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

شدت میدان الکتریکی عبارتست از:

$$\vec{E}=-\nabla V=-\hat{a}_r\frac{dV}{dr}=-\hat{a}_r\frac{V_0}{r\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

جریان کل با انتگرالگیری از $\vec{J}=\sigma\vec{E}$ روی یک سطح دلخواه عمود بر جریان با المان سطح $\overrightarrow{ds}=-rd\varphi dz\hat{a}_r$ به ترتیب زیر بدست می‌آید:

$$I=\int\vec{J}.\overrightarrow{ds}=\int\sigma\vec{E}.\overrightarrow{ds}=\int_0^h\int_0^\alpha\hat{a}_r\frac{\sigma V_0}{r\ln\left(\frac{b}{a}\right)}.rd\varphi dz\hat{a}_r=\frac{\alpha h\sigma V_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

در نهایت مقاومت مورد نظر برابر است با:

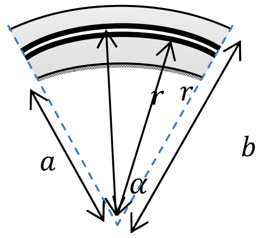
$$R=\frac{V_0}{I}=\frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{\alpha h\sigma}$$

روش دوم حل مسئله:

از پیش می‌دانیم که مقاومت یک هادی همگن با ضریب رسانندگی σ، طول l و با سطح مقطع یکنواخت A به صورت زیر است:

$$R=\frac{1}{\sigma}\frac{l}{A}$$

حال یک پوسته استوانه‌ای به شعاع داخلی r و شعاع خارجی $r+dr$ با زاویه مرکزی α و ارتفاع h مطابق شکل زیر در نظر می‌گیریم.



مقاومت این پوسته (بین شعاع داخلی و خارجی) برابر است با:

$$dR=\frac{1}{\sigma}\frac{dr}{\alpha rh}$$

بنابراین مقاومت کلی عبارتست از:

$$R = \int dR = \int_a^b \frac{1}{\sigma}\frac{dr}{\alpha r h} = \frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{\alpha h \sigma}$$

ج۵) از آنجا که ضریب رسانندگی محیط در این مسئله ثابت نیست نمی‌توان از حل معادله لاپلاس استفاده کرد. برای حل این مسئله از روش دوم پیشنهادی در مسئله قبل استفاده می‌کنیم. یک پوسته استوانه‌ای به شعاع داخلی r و شعاع خارجی $r + dr$ در نظر می‌گیریم. مقاومت در واحد طول این پوسته (بین شعاع داخلی و خارجی) برابر است با:

$$dR = \frac{1}{\sigma}\frac{dr}{2\pi r} = \frac{1}{\frac{\sigma_0}{1+\frac{a}{r}}}\frac{dr}{2\pi r}$$

بنابراین مقاومت کلی عبارتست از:

$$R = \int dR = \int_a^b \frac{1}{\frac{\sigma_0}{1+\frac{a}{r}}}\frac{dr}{2\pi r} = \frac{1}{2\pi\sigma_0}\left[\ln\frac{b}{a} + \frac{b-a}{b}\right]$$

ج۶) مقاومت بین کره هادی و نقاط بسیار دور در زمین ترکیب سری دو مقاومت زیر است:

۱) مقاومت بین دو نیم‌کره با شعاع‌های a و b (R_1)

۲) مقاومت بین دو نیم‌کره با شعاع‌های b و ∞ (R_2)

برای محاسبه مقاومت بین دو نیم‌کره با شعاع‌های a و b از روش توضیح داده شده در روش دوم مسئله ۴ استفاده می‌کنیم (لازم به ذکر است که از روش متداول توضیح داده شده در متن درس نیز می‌توان استفاده کرد). یک پوسته نیم‌کروی به شعاع داخلی R و شعاع خارجی dR در نظر می‌گیریم. مقاومت این پوسته (بین شعاع داخلی و خارجی) برابر است با:

$$dR = \frac{1}{\sigma}\frac{dR}{2\pi R^2}$$

بنابراین مقاومت کلی عبارتست از:

$$R = \int dR = \int_a^b \frac{1}{\sigma}\frac{dR}{2\pi R^2} = \frac{1}{2\pi\sigma}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right]$$

به این ترتیب مقاومت‌های R_1، R_2 و مقاومت کل برابرند با:

$$R_1 = \frac{1}{2\pi\sigma_1}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right] , R_2 = \frac{1}{2\pi\sigma_2 b}$$

$$R = R_1 + R_2 = \frac{1}{2\pi\sigma_1}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right] + \frac{1}{2\pi\sigma_2 b}$$

ج۷) از آنجا که ضریب رسانندگی محیط در این مسئله ثابت نیست نمی‌توان از حل معادله لاپلاس استفاده کرد. یک پوسته کروی به شعاع داخلی R و شعاع خارجی dR در نظر می‌گیریم. مقاومت این پوسته (بین شعاع داخلی و خارجی) برابر است با:

$$dR = \frac{1}{\sigma}\frac{dR}{4\pi R^2} = \frac{1}{\sigma_0\left(1 + \frac{k}{R}\right)}\frac{dR}{4\pi R^2}$$

بنابراین مقاومت کلی عبارتست از:

$$R = \int dR = \int_a^b \frac{1}{\sigma_0\left(1 + \frac{k}{R}\right)}\frac{dR}{4\pi R^2} = \frac{1}{4\pi\sigma_0 k}\left[\frac{R_2(R_1 + k)}{R_1(R_2 + k)}\right]$$