به نام خدا

حل تمرینات سری ششم

ج۱) از قانون مداری آمپر استفاده می‌کنیم. برای ناحیه $r < a$ مسیر C_1 را با شعاع $r < a$ درون هادی در نظر می‌گیریم. داریم:

$$\overrightarrow{B_1} = B_{1\varphi}\hat{a}_\varphi \ , \ \overrightarrow{dl} = rd\varphi\hat{a}_\varphi$$

$$\oint_{C_1} \overrightarrow{B_1}.\overrightarrow{dl} = \int_0^{2\pi} B_{1\varphi} rd\varphi = 2\pi r\, B_{1\varphi}$$

جریان گذرنده از سطح محصور شده توسط C_1 برابر است با:

$$I = \int \vec{J}.\overrightarrow{ds} = \int_0^{2\pi}\int_0^r \frac{1}{r}\hat{a}_z.rdrd\varphi\,\hat{a}_z = 2\pi r$$

به این ترتیب مطابق قانون مداری آمپر داریم:

$$2\pi rB_{1\varphi} = 2\pi r\mu_0 \ \Rightarrow \ \overrightarrow{B_1} = \mu_0\hat{a}_\varphi \ , \qquad r < a$$

برای ناحیه $r > a$ مسیر C_2 را با شعاع $r > a$ در نظر می‌گیریم. داریم:

$$\overrightarrow{B_2} = B_{2\varphi}\hat{a}_\varphi \ , \ \overrightarrow{dl} = rd\varphi\hat{a}_\varphi$$

$$\oint_{C_2} \overrightarrow{B_2}.\overrightarrow{dl} = \int_0^{2\pi} B_{2\varphi} rd\varphi = 2\pi r\, B_{2\varphi}$$

جریان گذرنده از سطح محصور شده توسط C_2 برابر است با:

$$I = \int \vec{J}.\overrightarrow{ds} = \int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{1}{r}\hat{a}_z.rdrd\varphi\,\hat{a}_z = 2\pi a$$

به این ترتیب مطابق قانون مداری آمپر داریم:

$$2\pi rB_{1\varphi} = 2\pi a\mu_0 \ \Rightarrow \ \overrightarrow{B_1} = \mu_0\frac{a}{r}\hat{a}_\varphi \ , \qquad r > a$$

ج۲) از قانون مداری آمپر استفاده می‌کنیم. برای ناحیه $r < a$ مسیر C_1 را با شعاع $r < a$ درون هادی داخلی در نظر می‌گیریم. داریم:

$$\overrightarrow{B_1} = B_{1\varphi}\hat{a}_\varphi \ , \ \overrightarrow{dl} = rd\varphi\hat{a}_\varphi$$

$$\oint_{C_1} \overrightarrow{B_1}.\overrightarrow{dl} = \int_0^{2\pi} B_{1\varphi} rd\varphi = 2\pi r\, B_{1\varphi}$$

جریان گذرنده از سطح محصور شده توسط C_1 برابر است با:

$$I_1 = \frac{\pi r^2}{\pi a^2} I = \left(\frac{r}{a}\right)^2 I$$

به این ترتیب مطابق قانون مداری آمپر داریم:

$$2\pi r B_{1\varphi} = \mu_0 \left(\frac{r}{a}\right)^2 I \;\; \Rightarrow \overrightarrow{B_1} = \frac{\mu_0 r I}{2\pi a^2} \hat{a}_\varphi \;\; , \qquad r < a$$

برای ناحیه $a < r < b$ مسیر C_2 را با شعاع $a < r < b$ در نظر می‌گیریم. داریم:

$$\overrightarrow{B_2} = B_{2\varphi} \hat{a}_\varphi \;\; , \;\; \overrightarrow{dl} = r d\varphi \hat{a}_\varphi$$

$$\oint_{C_2} \overrightarrow{B_2} . \overrightarrow{dl} = \int_0^{2\pi} B_{2\varphi} r d\varphi = 2\pi r \, B_{2\varphi}$$

جریان گذرنده از سطح محصور شده توسط C_2 برابر با I است. به این ترتیب مطابق قانون مداری آمپر داریم:

$$2\pi r B_{2\varphi} = \mu_0 I \;\; \Rightarrow \overrightarrow{B_2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{a}_\varphi \;\; , \qquad a < r < b$$

برای ناحیه $b < r < b + t$ مسیر C_3 را با شعاع $b < r < b + t$ درون هادی خارجی در نظر می‌گیریم. داریم:

$$\overrightarrow{B_3} = B_{3\varphi} \hat{a}_\varphi \;\; , \;\; \overrightarrow{dl} = r d\varphi \hat{a}_\varphi$$

$$\oint_{C_3} \overrightarrow{B_3} . \overrightarrow{dl} = \int_0^{2\pi} B_{3\varphi} r d\varphi = 2\pi r \, B_{3\varphi}$$

جریان گذرنده از سطح محصور شده توسط C_3 برابر است با:

$$I_3 = I + \frac{\pi (r^2 - b^2)}{\pi ((b + t)^2 - b^2)} (-I) = \frac{(b + t)^2 - r^2}{(b + t)^2 - b^2} I$$

به این ترتیب مطابق قانون مداری آمپر داریم:

$$2\pi r B_{3\varphi} = \mu_0 \frac{(b^2 - r^2)}{(b^2 - a^2)} I \;\; \Rightarrow \overrightarrow{B_3} = \frac{\mu_0}{2\pi r} \frac{(b + t)^2 - r^2}{(b + t)^2 - b^2} I \hat{a}_\varphi \;\; , \qquad r < a$$

و در نهایت برای ناحیه $r > b + t$ مسیر C_4 را با شعاع $r > b + t$ در نظر می‌گیریم. از آنجا که کل جریان گذرنده از سطح محصور توسط C_4 برابر با صفر است، بنابراین چگالی شار مغناطیسی نیز در این ناحیه صفر می‌باشد.

ج۳)

$$\nabla^2\vec{A} = -\mu_0\vec{J}$$

$$\nabla^2\vec{A} = \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}\hat{a}_x + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2}\hat{a}_y + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\hat{a}_z = \mu_0\left(2y\hat{a}_x - 2x\hat{a}_y\right)$$

$$\Rightarrow \vec{J} = -\frac{\nabla^2\vec{A}}{\mu_0} = 2\left(x\hat{a}_y - y\hat{a}_x\right)$$

ج۴)

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{r}{2}\hat{a}_\varphi$$

$$\varphi = \int \vec{B}.\overrightarrow{ds} = \int_0^5\int_1^2 \frac{r}{2}\hat{a}_\varphi.drdz\hat{a}_\varphi = \frac{15}{4}\text{Wb}$$

ج۵) از قانون بیوساوار استفاده می‌کنیم:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_C \frac{\overrightarrow{dl'} \times \left(\vec{R} - \overrightarrow{R'}\right)}{\left|\vec{R} - \overrightarrow{R'}\right|^3}$$

$$\overrightarrow{dl'} = dz'\hat{a}_z \quad , \qquad \vec{R} = r\hat{a}_r \quad , \quad \overrightarrow{R'} = z'\hat{a}_z$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_C \frac{dz'\hat{a}_z \times (r\hat{a}_r - z'\hat{a}_z)}{(r^2 + z'^2)^{3/2}} = \hat{a}_\varphi \frac{\mu_0 Ir}{4\pi}\int_{\frac{r}{tan\alpha_1}}^{\frac{r}{tan\alpha_2}} \frac{dz'}{(r^2 + z'^2)^{3/2}}$$

$$= \hat{a}_\varphi \frac{\mu_0 I}{4\pi r}(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)$$

ج۶) با استفاده از شرط مرزی مؤلفه‌های عمودی چگالی شار مغناطیسی داریم:

$$B_{1n} = B_{1z} = B_{2n} = B_{2z} = 8$$

به همین ترتیب با استفاده از شرط مرزی مؤلفه‌های مماسی شدت میدان مغناطیسی داریم:

$$\hat{a}_n \times \left(\vec{H}_1 - \vec{H}_2\right) = \overrightarrow{J_s}$$

$$-\hat{a}_z \times \left(\frac{\vec{B}_1}{6\mu_0} - \frac{\vec{B}_2}{4\mu_0}\right) = -\hat{a}_z \times \left(\frac{\left(B_{1x}\hat{a}_x + B_{1y}\hat{a}_y + B_{1z}\hat{a}_z\right)}{6\mu_0} - \frac{(5\hat{a}_x + 8\hat{a}_z)}{4\mu_0}\right)$$

$$\frac{1}{\mu_0}\left(\frac{B_{1y}}{6}\hat{a}_x - \frac{(2B_{1x} - 15)}{12}\hat{a}_y\right) = \overrightarrow{J_s} = \frac{1}{\mu_0}\hat{a}_y$$

$$\Rightarrow B_{1x} = 1.5 \ , \ B_{1y} = 0$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{B_1} = 1.5\hat{a}_x + 8\hat{a}_z\text{mWb/m}^2$$

$$\overrightarrow{H_1} = \frac{1}{6\mu_0}(1.5\hat{a}_x + 8\hat{a}_z)\text{A/m}$$

ج۷)

$$\chi_m = \mu_r - 1 = 4.5 - 1 = 3.5$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{4.5\mu_0} = \frac{4y\hat{a}_z}{4.5\mu_0} = \frac{0.89y\hat{a}_z}{\mu_0}\,\mathrm{A/m}$$

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} = \frac{3.11y\hat{a}_z}{\mu_0}\,\mathrm{A/m}$$

$$\overrightarrow{J_m} = \nabla \times \vec{M} = \frac{3.11\hat{a}_x}{\mu_0}\,\mathrm{A/m^2}$$

ج۸)جریان I_1 را روی سیم مستقیم در نظر می‌گیریم. چگالی شار تولیدی توسط این جریان برابر است با:

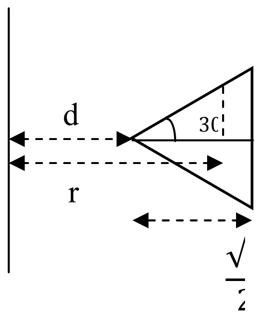
$$\vec{B}_1 = \hat{a}_\varphi \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$$

پیوند شار $\Lambda_{12} = \Phi_{12}$ برابر است با:

$$\Lambda_{12} = \int_{S_1} \vec{B}_1 . \overrightarrow{ds} = \int_d^{d+\frac{\sqrt{3}}{2}b} \int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}(r-d)}^{\frac{\sqrt{3}}{3}(r-d)} \hat{a}_\varphi \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} . dzdr\hat{a}_\varphi$$

$$= \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \int_d^{d+\frac{\sqrt{3}}{2}b} \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}(r-d)}{r} dr = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi}\left(b - \frac{2\sqrt{3}}{3} d \ln\left(\frac{d + \frac{\sqrt{3}}{2}b}{d}\right)\right)$$

برای بدست آوردن حدود انتگرالگیری از شکل زیر استفاده شده است:



در نهایت اندوکتانس متقابل عبارتست از:

$$L_{12} = \frac{\Lambda_{12}}{I_1} = \frac{\mu_0}{2\pi}\left(b - \frac{2\sqrt{3}}{3} d \ln\left(\frac{d + \frac{\sqrt{3}}{2}b}{d}\right)\right)$$