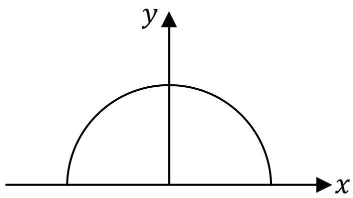
بسمه تعالی

امتحان میان‌ترم الکترومغناطیس

۱.روی نیم‌دایره‌ای به شعاع a باری با چگالی خطی $\rho_l = \rho_0 x^2$(که ρ_0 مقدار ثابتی است)توزیع شده است. شدت میدان الکتریکی را در مبدأ مختصات بدست آورید. (۰/۷۵ نمره)



****

۲.در مرکز یک توزیع بار کروی یکنواخت به شعاع a که دارای بار کل $-Q$ است، یک بار نقطه‌ای Q نیز قرار گرفته است. شدت میدان الکتریکی و پتانسیل الکتریکی را بیرون و درون این ابر باردار بدست آورید.(۱نمره)

****

۳.یک عایق کروی به شعاع a داریم. بردار قطبی‌شدگی درون این عایق برابر است با $\vec{P} = P_0 \hat{a}_z$ (که P_0 مقدار ثابتی است). شدت میدان الکتریکی ناشی از بارهای قطبی‌شده را در مرکز کره بدست آورید.(۱ نمره)

****

۴.یک خازن مسطح را که سطح هر هادی آن A و در ناحیه $0 < x < d$ است، در نظر بگیرید. ضریب دی‌الکتریک این خازن از رابطه $\varepsilon_r = e^{\alpha x}$(که α مقدار ثابتی است) پیروی می‌کند. ظرفیت این خازن را بدست آورید.(۰/۷۵ نمره)

****

۵.یک توزیع بار کروی به شعاع a با چگالی بار حجمی $\rho = \rho_0 \frac{a}{R}$ داریم. انرژی ذخیره شده در سیستم (یا انرژی لازم برای تشکیل این کره باردار) را به دو روش زیر بدست آورده و نتایج را با هم مقایسه کنید.

الف. با استفاده از پتانسیل الکتریکی و توزیع بار (۱ نمره)

ب. بااستفاده از شدت میدان الکتریکی (۰/۵ نمره)

پاسخ سؤالات میان‌ترم

ج۱)

$$\vec{E}=\int_{L'}\frac{\rho_l dl'(\vec{R}-\vec{R}')}{4\pi\varepsilon_0\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|^3}$$

$$\vec{R}=0\,,\vec{R}'=a\hat{a}_r\,,dl'=ad\varphi'$$

$$\vec{E}=\int_0^{\pi}\frac{\rho_0 a^2\cos^2\varphi'(0-a\hat{a}_r)}{4\pi\varepsilon_0 a^3}ad\varphi'$$

از آن جا که با تغییر φ' جهت $\hat{a}_r$ تغییر می‌کند، باید $\hat{a}_r$ را به مختصات کارتزین تبدیل کنیم:

$$\vec{E}=-\frac{\rho_0 a}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi}\cos^2\varphi'\left(\cos\varphi'\hat{a}_x+\sin\varphi'\hat{a}_y\right)d\varphi'$$

$$=-\frac{\rho_0 a}{4\pi\varepsilon_0}\times\frac{2}{3}\hat{a}_y=-\frac{\rho_0 a}{6\pi\varepsilon_0}\hat{a}_y$$

ج۲) از آنجا که در نواحی $R>a$ بار کل درون سطح گوسی (که یک سطح کروی با شعاع $R>a$ است) صفر می‌باشد، بنابراین:

$$\vec{E}_1=0\;\;,V_1=-\int_{\infty}^{R}\overrightarrow{E_1}.\overrightarrow{dl}=0$$

برای نواحی $R<a$ بار کلی درون سطح گوسی (که یک سطح کروی با شعاع $R<a$ است) برابر است با:

$$Q_T=Q-Q\left(\frac{R}{a}\right)^3$$

بنابراین با استفاده از قانون گوس داریم:

$$\vec{E}_2=E_{2R}\hat{a}_R$$

$$E_{2R}4\pi R^2=\frac{Q-Q\left(\frac{R}{a}\right)^3}{\varepsilon_0}\;\;\Rightarrow\;\;\vec{E}_2=\frac{Q\left(1-\left(\frac{R}{a}\right)^3\right)}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{a}_R$$

$$V_2=-\int_{\infty}^{R}\vec{E}.\overrightarrow{dl}=-\int_{\infty}^{a}\vec{E}_1.\overrightarrow{dl}-\int_{a}^{R}\vec{E}_2.\overrightarrow{dl}=-\int_{a}^{R}\frac{Q\left(1-\left(\frac{R}{a}\right)^3\right)}{4\pi\varepsilon_0 R^2}dR=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R}+\frac{R^2}{2a^3}-\frac{3}{2a}\right)$$

ج۳) ابتدا مقدار چگالی بارهای قطبی شده را بدست می‌آوریم:

$$\rho_{ps}=\vec{P}.\hat{a}_n=P_0\hat{a}_z.\hat{a}_R=P_0\cos\theta$$

$$\rho_p=-\nabla.\vec{P}=0$$

حال دی‌الکتریک را کنار گذاشته و شدت میدان الکتریکی ناشی ازتوزیع بار سطحی ρ_{ps} را بدست می‌آوریم. توجه شود که در این مسئله نمی‌توان از قانون گوس استفاده کرد.

$$\vec{E}=\int_{S'}\frac{\rho_s ds'(\vec{R}-\vec{R}')}{4\pi\varepsilon_0\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|^3}$$

$$\vec{R} = 0\,, \vec{R}' = a\hat{a}_R, ds' = a^2\sin\theta' d\theta' d\varphi'$$
$$\vec{E} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{P_0\cos\theta'(0 - a\hat{a}_R)}{4\pi\varepsilon_0 a^3}a^2\sin\theta' d\theta' d\varphi'$$

از آن جا که با تغییر θ' و φ' جهت $\hat{a}_R$ تغییر می‌کند، باید $\hat{a}_R$ را به مختصات کارتزین تبدیل کنیم:

$$\vec{E} = -\frac{P_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\cos\theta'\sin\theta'\left(\sin\theta'\cos\varphi'\hat{a}_x + \sin\theta'\sin\varphi'\hat{a}_y + \cos\theta'\hat{a}_z\right)d\theta' d\varphi'$$
$$= -\frac{P_0}{4\pi\varepsilon_0}\times 2\pi\int_0^{\pi}\cos^2\theta'\sin\theta' d\theta'\,\hat{a}_z = -\frac{P_0}{3\varepsilon_0}\hat{a}_z$$

ج۴) بارهای $+Q$ و $-Q$ را به ترتیب روی صفحات سمت راست و چپ خازن قرار می‌دهیم. شدت میدان الکتریکی و پتانسیل الکتریکی بین صفحات خازن برابرند با:

$$\vec{E} = -\frac{\rho_s}{\varepsilon}\hat{a}_x$$
$$V = -\int_0^d \vec{E}.dl = -\int_0^d -\frac{\rho_s}{\varepsilon}\hat{a}_x.dx\,\hat{a}_x = \frac{\rho_s}{\varepsilon_0}\int_0^d e^{-\alpha x}dx = -\frac{\rho_s}{\alpha\varepsilon_0}\left(e^{-\alpha d} - 1\right) = \frac{Q}{\alpha A\varepsilon_0}\left(1 - e^{-\alpha d}\right)$$

به این ترتیب ظرفیت این خازن برابر خواهد شد با:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\alpha A\varepsilon_0}{(1 - e^{-\alpha d})}$$

ج۵) الف) ابتدا با استفاده از قانون گوس شدت میدان الکتریکی را در بیرون و درون توزیع بدست می‌آوریم:

برای نواحی $R > a$:

$$\vec{E}_1 = E_{1R}\hat{a}_R$$
$$E_{1R}4\pi R^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a}\rho_0\frac{a}{R}R^2\sin\theta dR d\theta d\varphi = \frac{\rho_0 2\pi a^3}{\varepsilon_0}$$
$$\vec{E}_1 = \frac{\rho_0 a^3}{2\varepsilon_0 R^2}\hat{a}_R$$

برای نواحی $R < a$:

$$\vec{E}_2 = E_{2R}\hat{a}_R$$
$$E_{2R}4\pi R^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R}\rho_0\frac{a}{R}R^2\sin\theta dR d\theta d\varphi = \frac{\rho_0 2\pi a R^2}{\varepsilon_0}$$
$$\vec{E}_2 = \frac{\rho_0 a}{2\varepsilon_0}\hat{a}_R$$

حال پتانسیل الکتریکی را درون توزیع بدست می‌آوریم:

$$V = -\int_{\infty}^{R}\vec{E}.\vec{dl} = -\int_{\infty}^{a}\vec{E}_1.\vec{dl} - \int_{a}^{R}\vec{E}_2.\vec{dl} = \frac{\rho_0 a}{2\varepsilon_0}(2a - R)$$

بنابراین انرژی ذخیره شده در سیستم برابر است با:

$$W_e = \frac{1}{2}\rho \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_a^{b} \rho_0 \frac{a}{R}\frac{\rho_0 a}{2\varepsilon_0}(2a-R)\, R^2 sin\theta dR d\theta d\varphi = \frac{2\pi{\rho_0}^2 a^5}{3\varepsilon_0}$$

ب) برای محاسبه انرژی ذخیره شده در این قسمت از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$W_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} |E|^2\, dv = \frac{1}{2}\varepsilon_0 4\pi \left(\int_0^{a}\left(\frac{\rho_0 a}{2\varepsilon_0}\right)^2 R^2\, dR + \int_a^{\infty}\left(\frac{\rho_0 a^3}{2\varepsilon_0 R^2}\right)^2 R^2\, dR\right)$$

$$= \frac{\pi{\rho_0}^2 a^5}{6\varepsilon_0} + \frac{\pi{\rho_0}^2 a^5}{2\varepsilon_0} = \frac{2\pi{\rho_0}^2 a^5}{3\varepsilon_0}$$

مشاهده می‌شود که نتایج حاصل از دو روش با هم برابر است.