بسمه تعالی

کوئیز شماره ۱: یک کره به شعاع a و مرکز مبدأ مختصات دارای توزیع بار حجمی $\rho = a^2 - R^2$ است. این توزیع بار به صورت هم‌مرکز توسط یک پوسته هادی با شعاع داخلی a و شعاع خارجی b احاطه شده است. شدت میدان الکتریکی و پتانسیل الکتریکی را در تمام نقاط بدست آورید.

پاسخ:

برای تعیین شدت میدان الکتریکی از قانون گوس استفاده می‌کنیم. برای نواحی $R > b$ داریم:

$$\overrightarrow{E_1} = E_{R1}\hat{a}_R$$

$$\oint_s \overrightarrow{E_1}.\overrightarrow{ds} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a}\frac{\rho}{\varepsilon_0}R^2 sin\theta dR d\theta d\varphi$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} E_{R1}\, R^2 sin\theta d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a}\frac{(a^2 - R^2)}{\varepsilon_0}R^2 sin\theta dR d\theta d\varphi$$

$$\Rightarrow E_{R1} 4\pi R^2 = \frac{8\pi a^5}{15\varepsilon_0} \Rightarrow \overrightarrow{E_1} = \frac{2a^5}{15\varepsilon_0 R^2}\hat{a}_R$$

در نواحی $a < R < b$ به علت حضور هادی داریم:

$$\overrightarrow{E_2} = 0$$

و برای نواحی $R < a$ داریم:

$$\overrightarrow{E_3} = E_{R3}\hat{a}_R$$

$$\oint_s \overrightarrow{E_3}.\overrightarrow{ds} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R}\frac{\rho}{\varepsilon_0}R^2 sin\theta dR d\theta d\varphi$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} E_{R3}\, R^2 sin\theta d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R}\frac{(a^2 - R^2)}{\varepsilon_0}R^2 sin\theta dR d\theta d\varphi$$

$$\Rightarrow E_{R3} 4\pi R^2 = \left(\frac{a^2}{3} - \frac{R^2}{5}\right)\frac{4\pi R^3}{\varepsilon_0} \Rightarrow \overrightarrow{E_3} = \left(\frac{a^2}{3} - \frac{R^2}{5}\right)\frac{R}{\varepsilon_0}\hat{a}_R$$

حال به محاسبه پتانسیل الکتریکی در سه ناحیه مورد نظر می‌پردازیم:

$$R > b: V_1 = -\int_{\infty}^{R}\overrightarrow{E_1}.\overrightarrow{dl} = \frac{2a^5}{15\varepsilon_0 R}$$

$$a < R < b:\ \ V_2 = -\int_{\infty}^{b}\overrightarrow{E_1}.\overrightarrow{dl} - \int_{b}^{R}\overrightarrow{E_2}.\overrightarrow{dl} = \frac{2a^5}{15\varepsilon_0 b}$$

$$R < a:\ V_3 = -\int_{\infty}^{b}\overrightarrow{E_1}.\overrightarrow{dl} - \int_{b}^{a}\overrightarrow{E_2}.\overrightarrow{dl} - \int_{a}^{R}\overrightarrow{E_3}.\overrightarrow{dl} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{2a^5}{15b} + \frac{R^4}{20} + \frac{7a^4}{60} - \frac{a^2R^2}{6}\right)$$