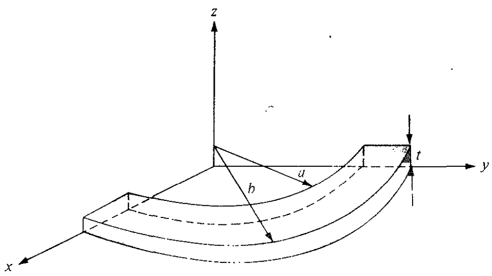
بسمه‌تعالی

کوئیز شماره ۲

نام و نام‌خانوادگی:

یک جسم هادی با ضریب رسانندگی σ مطابق شکل زیر داریم.



الف) فرض کنید که سطح $r = a$ از این جسم دارای پتانسیل الکتریکی صفر و سطح $r = b$ دارای پتانسیل الکتریکی V_0 باشد. با حل معادله لاپلاس، پتانسیل را درون این جسم بدست آورید. (راهنمایی: پتانسیل فقط به r در مختصات استوانه‌ای وابسته است)

ب) با توجه به نتیجه قسمت (الف)، مقاومت بین سطوح $r = a$ و $r = b$ را در این جسم بدست آورید.

ج) حال فرض کنید که سطح $z = 0$ از این جسم دارای پتانسیل الکتریکی صفر و سطح $z = t$ دارای پتانسیل الکتریکی V_0 باشد. با حل معادله لاپلاس، پتانسیل را درون این جسم بدست آورید. (راهنمایی: پتانسیل فقط به z در مختصات استوانه‌ای وابسته است)

د) با توجه به نتیجه قسمت (ج)، مقاومت بین سطوح $z = 0$ و $z = t$ را در این جسم بدست آورید.

راهنمایی: رابطه لاپلاسین در مختصات استوانه‌ای $\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$

رابطه گرادیان در مختصات استوانه‌ای $\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\hat{a}_\varphi + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{a}_z$

پاسخ: الف) جواب معادله لاپلاس به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) = 0$$

$$\Rightarrow\ r\frac{\partial V}{\partial r} = A\ \Rightarrow V = A\ln r + B$$

حال با توجه به شرایط مرزی داریم:

$$V(a) = A\ln a + B = 0$$
$$V(b) = A\ln b + B = V_0$$
$$\Rightarrow A = \frac{V_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\ , B = -\frac{V_0\ln a}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\ \Rightarrow\ V = \frac{V_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}(\ln r - \ln a)$$

ب) کافی است که از روی پتانسیل شدت میدان الکتریکی و سپس جریان را بدست آوریم:

$$\vec{E} = -\nabla V = -\hat{a}_r\frac{1}{r}\frac{V_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

جریان کل با انتگرالگیری از $\vec{J} = \sigma\vec{E}$ روی یک سطح دلخواه عمود بر جریان با المان سطح $\overrightarrow{ds} = -rd\varphi dz\hat{a}_r$ به ترتیب زیر بدست می‌آید:

$$I = \int \vec{J}.\overrightarrow{ds} = \int \sigma\vec{E}.\overrightarrow{ds} = \int_0^t\int_0^{\pi/2}\hat{a}_r\frac{\sigma V_0}{r\ln\left(\frac{b}{a}\right)}.rd\varphi dz\hat{a}_r = \frac{\pi t\sigma V_0}{2\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

در نهایت مقاومت مورد نظر برابر است با:

$$R = \frac{V_0}{I} = \frac{2\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{\pi t\sigma}$$

ج) جواب معادله لاپلاس به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$
$$\Rightarrow V = A\mathrm{z} + B$$

حال با توجه به شرایط مرزی داریم:

$$V(0) = B = 0$$
$$V(t) = A\mathrm{t} + B = V_0$$
$$\Rightarrow A = \frac{V_0}{t}\ , B = 0 \ \ \Rightarrow \ \ V = \frac{V_0}{t} z$$

ب) کافی است که از روی پتانسیل شدت میدان الکتریکی و سپس جریان را بدست آوریم:

$$\vec{E} = -\nabla V = -\hat{a}_z \frac{V_0}{t}$$

جریان کل با انتگرالگیری از $\vec{J} = \sigma\vec{E}$ روی یک سطح دلخواه عمود بر جریان با المان سطح $\overrightarrow{ds} = -r dr d\varphi \hat{a}_z$ به ترتیب زیر بدست می‌آید:

$$I = \int \vec{J}.\overrightarrow{ds} = \int \sigma\vec{E}.\overrightarrow{ds} = \int_0^{\pi/2}\int_a^b \hat{a}_z \frac{\sigma V_0}{t}.r dr d\varphi \hat{a}_z = \frac{\pi\sigma V_0}{4t}(b^2 - a^2)$$

در نهایت مقاومت مورد نظر برابر است با:

$$R = \frac{V_0}{I} = \frac{4t}{\pi\sigma(b^2 - a^2)}$$